

## 4.2 二项式系数的性质

**【学习目标】** 1.了解杨辉三角，会用杨辉三角求二项式乘方次数较小时的各项的二项式系数.2.理解二项式系数的性质并灵活运用.3.掌握“赋值法”并会灵活应用.

### 【导语】

被誉为“世界七大奇迹”之一的古埃及的金字塔，以其宏伟的气势、严密的结构、精美绝伦的整体外观让世界叹服.而数学上也有“金字塔”，这就是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式在 $n=1,2,\cdots$ 时的二项式系数而垒成的金字塔，称为杨辉三角，它是我国南宋数学家杨辉首先发现的，比欧洲的帕斯卡整整早发现了500年左右.



古代数学家——杨辉

### 一、杨辉三角

**问题1** 根据二项式定理写出 $(a+b)^n$  ( $n=1,2,3,4,5,6$ )的二项式系数.可以写成如下形式，则第7行的数字分别是多少？

**提示** 1,7,21,35,35,21,7,1

$$\begin{array}{rcccccccc}
 (a+b)^1 & \cdots & 1 & & 1 & & & & \\
 (a+b)^2 & \cdots & 1 & 2 & 1 & & & & \\
 (a+b)^3 & \cdots & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 (a+b)^4 & \cdots & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 (a+b)^5 & \cdots & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 (a+b)^6 & \cdots & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & & & & & \cdots
 \end{array}$$

**【知识梳理】**(1)在同一行中，每行两端都是1，与这两个1等距离的项的系数相等；

(2)在相邻的两行中，除1以外的每一个数都等于它“肩上”的两个数的和，即 $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ .

**例1** (1)在 $(a+b)^n$ 的二项展开式中，与第 $k$ 项的二项式系数相同的项是( )

- A. 第 $n-k$ 项                                      B. 第 $n-k-1$ 项  
C. 第 $n-k+1$ 项                                      D. 第 $n-k+2$ 项

(2)观察图中的数所成的规律，则 $a$ 所表示的数是( )

- A. 8   B. 6   C. 4   D. 2

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & a & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 
 \end{array}$$

**反思感悟** 解决与杨辉三角有关问题的一般思路

- (1)观察：对题目要横看、竖看、隔行看、连续看，多角度观察.  
(2)找规律：通过观察找出每一行的数之间，行与行之间的数据的规律.  
(3)将数据间的这种联系用数学式表达出来，使问题得解.

**跟踪训练1** (1)在 $(x+y)^n$ 的展开式中，第4项与第8项的系数相等，则 $n$ 为( )

- A. 4   B. 6   C. 8   D. 10

(2)如图是与杨辉三角有类似性质的三角形数垒， $a, b$ 是某行的前两个数，

当 $a=7$ 时， $b$ 等于( )

- A. 20   B. 21   C. 22   D. 23

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & 2 & & & \\
 & 3 & 4 & 3 & & & \\
 & 4 & 7 & 7 & 4 & & \\
 5 & 11 & 14 & 11 & 5 & & \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 a & b & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 
 \end{array}$$

## 二、二项式系数的增减性与最值

问题2 怎样找二项展开式中的二项式系数的最大值?

提示  $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$ . 当  $k < \frac{n+1}{2}$  时,  $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1$ , 说明二项式系数逐渐增大;

同理, 当  $k > \frac{n+1}{2}$  时, 二项式系数逐渐减小.

【知识梳理】(1)增减性: 当  $k < \frac{n+1}{2}$  时, 二项式系数逐渐增大的; 当  $k > \frac{n+1}{2}$  时, 二项式系数是逐渐减小的.

(2)最大值: 当  $n$  为偶数时, 中间一项的二项式系数  $C_n^{\frac{n}{2}}$  最大; 当  $n$  为奇数时, 中间两项的二项式系数  $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ,  $C_n^{\frac{n+1}{2}}$  相等, 且同时取得最大值.

注意点: (1)当  $n$  为偶数时, 中间项的二项式系数最大, 有一项;

(2)当  $n$  为奇数时, 中间项的二项式系数最大, 有两项.

例2 已知  $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} + 3x^2)^n$  展开式中的二项式系数和为 32. 求展开式中二项式系数最大的项.

反思感悟 求二项式系数的最大项, 根据二项式系数的性质对  $(a+b)^n$  中的  $n$  进行讨论.

(1)当  $n$  为奇数时, 中间两项的二项式系数最大;

(2)当  $n$  为偶数时, 中间一项的二项式系数最大.

跟踪训练2 (1)  $(1-x)^{2n-1}$  展开式中, 二项式系数最大的项是( )

A. 第  $n-1$  项 B. 第  $n$  项 C. 第  $n-1$  项与第  $n+1$  项 D. 第  $n$  项与第  $n+1$  项

(2)  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$  展开式的第 6 项系数最大, 则其常数项为( )

A. 120 B. 252 C. 210 D. 45

## 三、二项展开式的系数和问题

问题3 在二项展开式  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$  中, 令  $a=b=1$ , 可得到什么结论? 令  $a=1, b=-1$ , 可得到什么结论?

提示  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ;  $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$ .

例3 若  $(3x-1)^7 = a_7 x^7 + a_6 x^6 + \cdots + a_1 x + a_0$ , 求:

(1)  $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ ; (2)  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ ; (3)  $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_7|$ .

反思感悟 求展开式的各项系数之和常用赋值法

“赋值法”是求二项式系数常用的方法, 根据题目要求, 灵活赋给字母不同的值. 一般地, 要使展开式中项的关系变为系数的关系, 令  $x=0$  可得常数项, 令  $x=1$  可得所有项系数之和, 令  $x=-1$

1 可得偶次项系数之和与奇次项系数之和的差, 而当二项展开式中含负值项时, 令  $x = -1$  则可得各项系数绝对值之和.

跟踪训练 3 设  $(1-2x)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2022}x^{2022} (x \in \mathbf{R})$ .

(1) 求  $a_0$  的值; (2) 求  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$  的值; (3) 求  $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2021}$  的值.

### ■ 课堂小结 ■

1. 知识清单: (1) 杨辉三角. (2) 二项式系数的增减性与最值. (3) 二项展开式的系数和问题.
2. 方法归纳: 赋值法.
3. 常见误区: 系数与二项式系数的区别, 中间项的个数, 含绝对值的系数.

### 随堂演练

1. 在  $(a-b)^{20}$  的二项展开式中, 二项式系数与第 6 项的二项式系数相同的项是( )  
A. 第 15 项      B. 第 16 项      C. 第 17 项      D. 第 18 项
2.  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{11}$  的展开式中二项式系数最大的项是( )  
A. 第 3 项      B. 第 6 项      C. 第 6, 7 项      D. 第 5, 7 项
3.  $(x-1)^{11}$  的展开式中,  $x$  的奇次幂项的系数之和是( )  
A. 2 048      B. -1 023      C. -1 024      D. 1 024
4.  $(2x-1)^6$  的展开式中各项系数的和为\_\_\_\_\_, 各项的二项式系数的和为\_\_\_\_\_.

## 课时对点练

### 基础巩固

1. 在  $(1+x)^n (n \in \mathbf{N}_+)$  的展开式中, 若只有  $x^5$  的系数最大, 则  $n$  的值为( )  
A. 8    B. 9    C. 10    D. 11
2. 若  $(x+3y)^n$  展开式的各项系数和等于  $(7a+b)^{10}$  展开式中的二项式系数之和, 则  $n$  的值为( )  
A. 5    B. 8    C. 10    D. 15
3.  $(2x-3)^{10}$  的展开式中, 奇数项的二项式系数和为( )  
A.  $2^{10}$     B.  $2^9$     C.  $\frac{5^{10}-1}{2}$     D.  $\frac{-1-5^{10}}{2}$
4. 已知关于  $x$  的二项式  $\left(\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$  展开式的二项式系数之和为 32, 常数项为 80, 则  $a$  的值为

A. 1 B.  $\pm 1$  C. 2 D.  $\pm 2$ 

5. 如果一个多位数的各个数位上的数字从左到右按由小到大的顺序排列, 则称此数为“上升”的, 那么所有“上升”的正整数的个数为( )

A. 530 B. 502 C. 503 D. 505

6. (多选) 设  $(2x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6 + a_7x^7$ , 则下列结论正确的是( )

A.  $a_2 + a_5 = 588$  B.  $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 1$  C.  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{1+3^7}{2}$  D.  $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7| = 3^7 - 1$

7. 若  $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$  展开式的各项系数之和为 32, 则其展开式中的常数项是\_\_\_\_\_.

8. 设  $(3x-2)^6 = a_0 + a_1(2x-1) + a_2(2x-1)^2 + \cdots + a_6(2x-1)^6$ , 则  $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_0 + a_2 + a_4 + a_6} =$ \_\_\_\_\_.

9. 设  $(2x-3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ , 求:

(1)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ; (2)  $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ ; (3)  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|$ .

10. 在  $(3x-2y)^{20}$  的展开式中, 求: (1) 二项式系数最大的项;

(2) 系数绝对值最大的项; (3) 系数最大的项.

### 综合运用

11. 若  $x^{10} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ , 则  $a_8$  的值为( )

A. 10 B. 45 C. -9 D. -45

12. 在  $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}\right)^n$  的展开式中, 所有奇数项系数之和为 1 024, 则中间项系数是( )

A. 330 B. 462 C. 682 D. 792

13. 若  $(1-2x)^{2\,022} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2\,022}x^{2\,022} (x \in \mathbf{R})$ , 则  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2\,022}}{2^{2\,022}}$  的值为( )

14. 已知  $(2x-1)^n$  二项展开式中, 奇次项系数的和比偶次项系数的和小  $3^8$ , 则  $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n =$ \_\_\_\_\_.

### 拓广探究

15. 如图所示的数阵叫“莱布尼茨调和三角形”, 他们是由正整数的倒数组成的,

第  $n$  行有  $n$  个数且两端的数均为  $\frac{1}{n} (n \geq 2)$ , 每个数是它下一行左右相邻两数的和, 如:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 & & & & & \cdots & & & & 
 \end{array}$$

$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ ,  $\cdots$ , 则第  $n (n \geq 3)$  行第 3 个数字是\_\_\_\_\_.